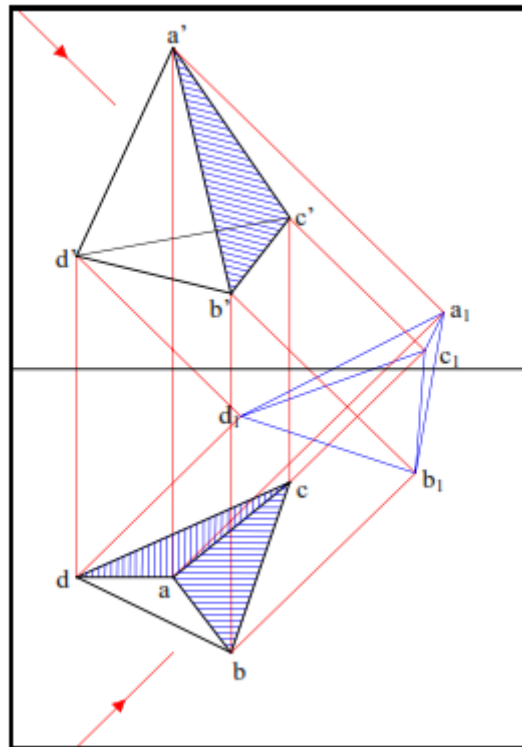


ECOLE NATIONALE SUPERIEURE POLYTECHNIQUE DE DOUALA



COURS DE GEOMETRIE DESCRIPTIVE

NIVEAU : TRONCS COMMUNS

SOMMAIRE

CHAPITRE I : GENERALITES

CHAPITRE II : LES ELEMENTS DE FIGURES

- Le point
- La droite
- Le plan

CHAPITRE III : LES OMBRES

CHAPITRE IV : LES POLYEDRES

INTRODUCTION

La géométrie descriptive n'est pas l'invention d'un seul homme. Si G. Monge, à la fin du XVIIIe siècle, en a développé la théorie et fixé les principes, Dürer, dès le XVI siècle, avait ébauché une méthode similaire à l'usage des peintres. Il s'agit avant tout d'une méthode graphique, c'est-à-dire *opérant graphiquement sur des êtres graphiques*, permettant de résoudre des problèmes d'angles, de dimensions, de positions, d'intersections, etc.

La géométrie descriptive telle que l'a définie Monge peut donc se percevoir comme la théorisation d'un "art du trait" utilisé depuis la naissance des métiers afin de résoudre plus ou moins empiriquement les problèmes posés par la coupe des pierres et la coupe du bois. La géométrie descriptive est une géométrie *pratique*, et en ce sens se distingue des géométries euclidienne ou analytique (l'algèbre) par essence spéculatives.

Cette dimension pratique est la raison pour laquelle l'étude de la géométrie descriptive ne requiert pas de solides connaissances mathématiques. Un étudiant ayant suivi une filière littéraire peut aborder cette discipline sans complexe.

La géométrie descriptive est aussi une des rares disciplines dont l'enseignement dans les grandes écoles persiste depuis le XIXe siècle, et on est en droit de se demander, à l'heure de l'informatique triomphante notamment dans la conception et la représentation des objets en trois dimensions, si cet enseignement est toujours justifié.

Certes les outils actuels permettent d'élaborer des volumes complexes plus rapidement et avec plus de précision, mais la géométrie descriptive possède deux vertus essentielles pour l'élève ingénieur : d'une part la gymnastique mentale qu'elle implique lui apprend à voir dans l'espace et à comprendre la représentation des objets tridimensionnels, ce qui sera de la plus grande utilité devant l'écran d'un modelleur 3D, et d'autre part le soin qu'elle exige dans la réalisation des épures apporte la rigueur nécessaire à une expression graphique pertinente, fut-elle assistée par ordinateur.

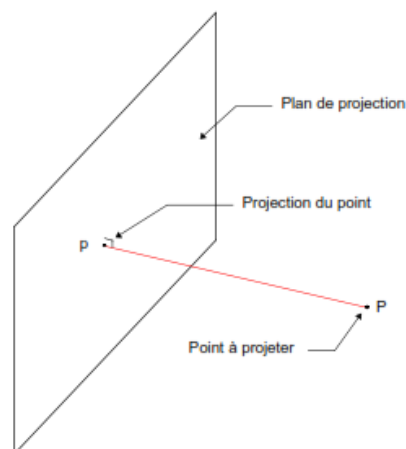
CHAPITRE I : GENERALITES

1.1 Principes

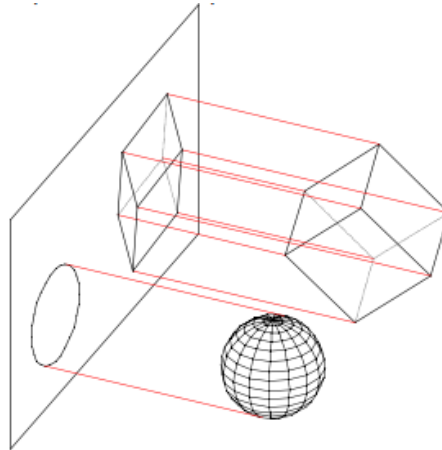
La géométrie descriptive se propose de donner, dans les deux dimensions de la feuille de papier, une représentation *opératoire* des objets tridimensionnels : cette représentation bi-dimensionnelle doit décrire suffisamment complètement l'objet afin de pouvoir servir de support à des opérations sur celui-ci.

1.1.1 La projection orthogonale :

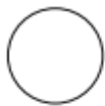
On appelle projection orthogonale d'un point (P) sur un plan le pied (p) de la perpendiculaire (Pp) abaissée de ce point sur le plan.



Remarque : Tous les points appartenant à une même droite perpendiculaire au plan de projection se projettent en un même point. La projection orthogonale sur un seul plan n'est donc pas suffisante pour déterminer la position du point dans l'espace. Plus généralement, la projection orthogonale d'un solide se construit en recherchant la projection de ses points caractéristiques.



La projection orthogonale sur un plan des objets tridimensionnels en donne une représentation bidimensionnelle. Cependant, une seule projection orthogonale n'est pas suffisante pour caractériser entièrement un objet dans l'espace, car dans ce passage des 3 aux 2 dimensions, de l'information est nécessairement perdue :



Est-ce la projection d'un cylindre, d'une sphère ?



Est-ce la projection d'un cylindre, d'un parallélépipède ?

Afin d'éviter cette perte d'information, la géométrie descriptive a recours à deux projections orthogonales distinctes mais coïncidentes.

1.1.2 Les deux plans de projections :

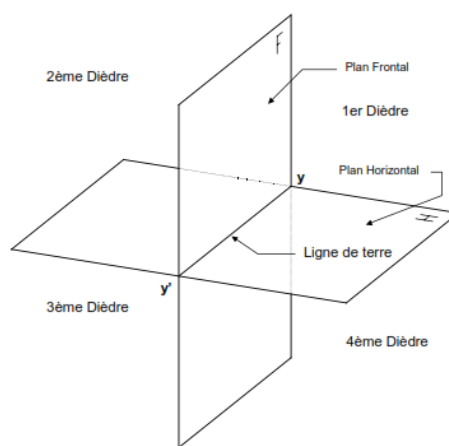
Afin de représenter les objets tridimensionnels dans les deux dimensions de la feuille de papier, on commence donc par se donner dans l'espace *deux* plans de projections perpendiculaires. Ces deux plans se coupent suivant une droite ($y'y$) appelée **ligne de terre**.

Le premier plan (**H**) est appelé **plan horizontal de projection**.

Le second plan (**F**) est appelé **plan frontal de projection**.

Ces deux plans découpent l'espace en quatre régions, ou **dièdres**, numérotés comme ci-dessous :

1.1.3 Les quatre dièdres :

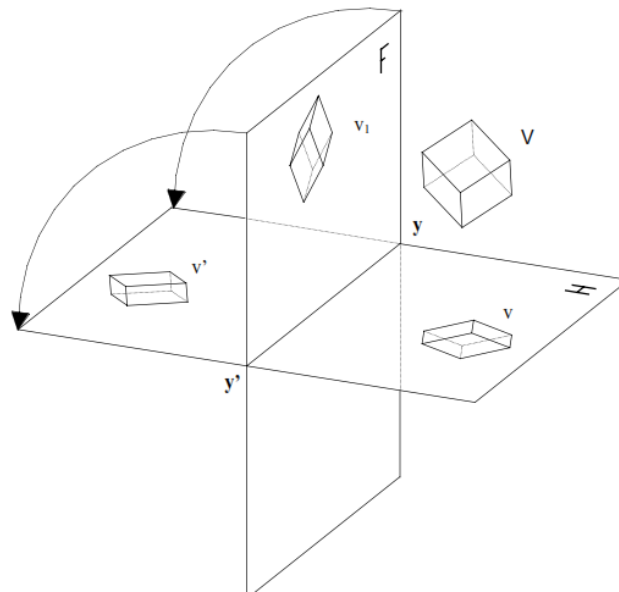


1.1.4 Rabattement du plan frontal :

Quelle que soit sa position dans l'espace, un objet tridimensionnel (**V**) à représenter se projette orthogonalement sur le plan horizontal en une figure bidimensionnelle (**v**) et sur le plan frontal en une autre figure bidimensionnelle (**v1**).

- ✓ (**v**) est appelée **projection horizontale** de (**V**)
- ✓ (**v1**) est appelée **projection frontale** de (**V**)

Pour obtenir les deux projections bidimensionnelles sur un même plan (la feuille de papier), et les faire ainsi coïncider, on fait tourner le plan frontal (**F**) en choisissant comme axe de rotation la ligne de terre (**y'y**) de façon à le rabattre sur le plan horizontal (**H**). La projection frontale (**v**) se trouve alors en (**v'**).

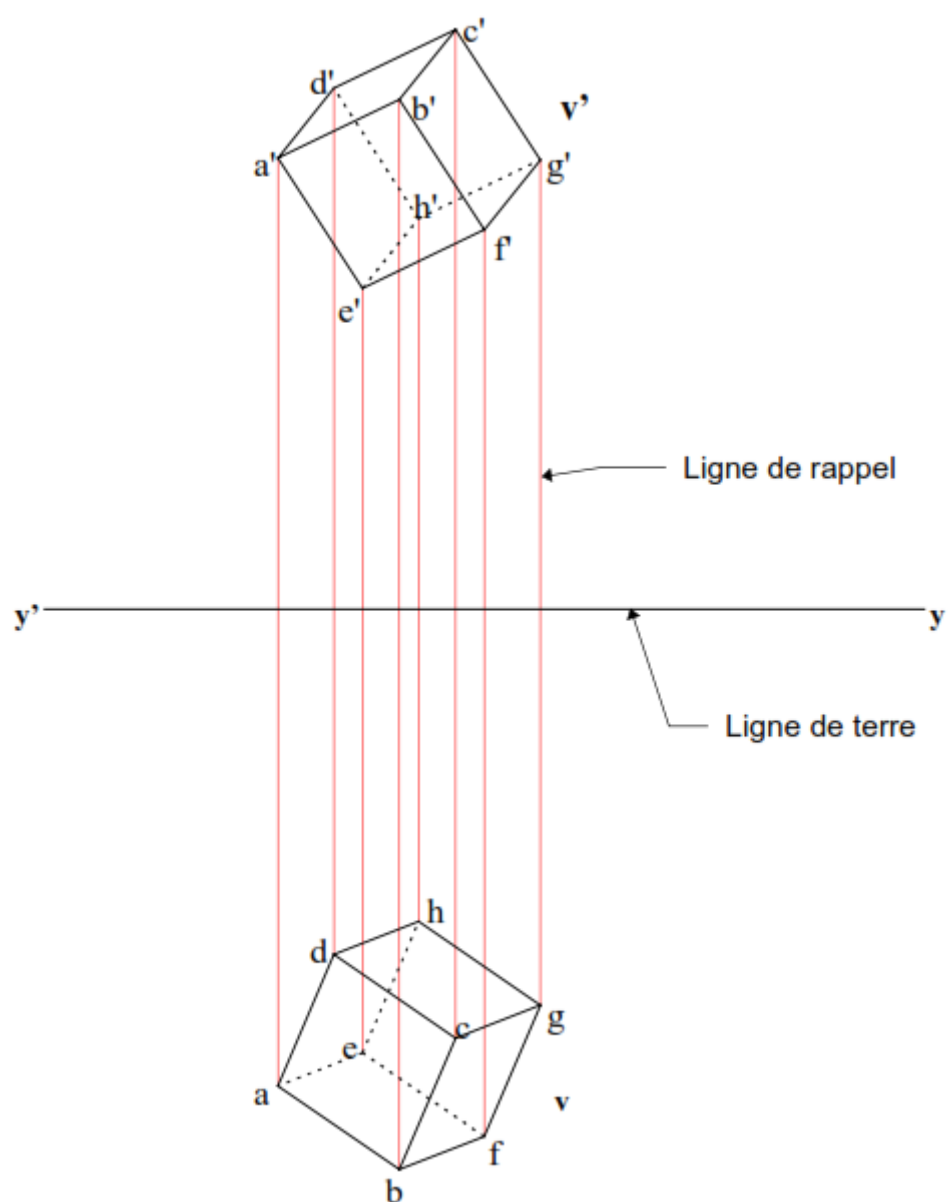


1.1.5 L'épure :

Les projections horizontale et frontale se trouvant donc sur un même plan (toujours la feuille de papier), nous avons ainsi réalisé une **épure** de l'objet tridimensionnel à représenter.

Pour faciliter la lecture d'une épure et reconstituer mentalement la forme de l'objet et sa position dans l'espace, on utilise des conventions de représentation :

- ✓ Les lignes vues sont dessinées en trait plein.
- ✓ Les lignes cachées en points ronds ou ponctués.
- ✓ Les lignes de rappel et les lignes de constructions en trait rouge (ou noir) fin.



CHAPITRE II : LES ELEMENTS DE FIGURES

II.1 LE POINT

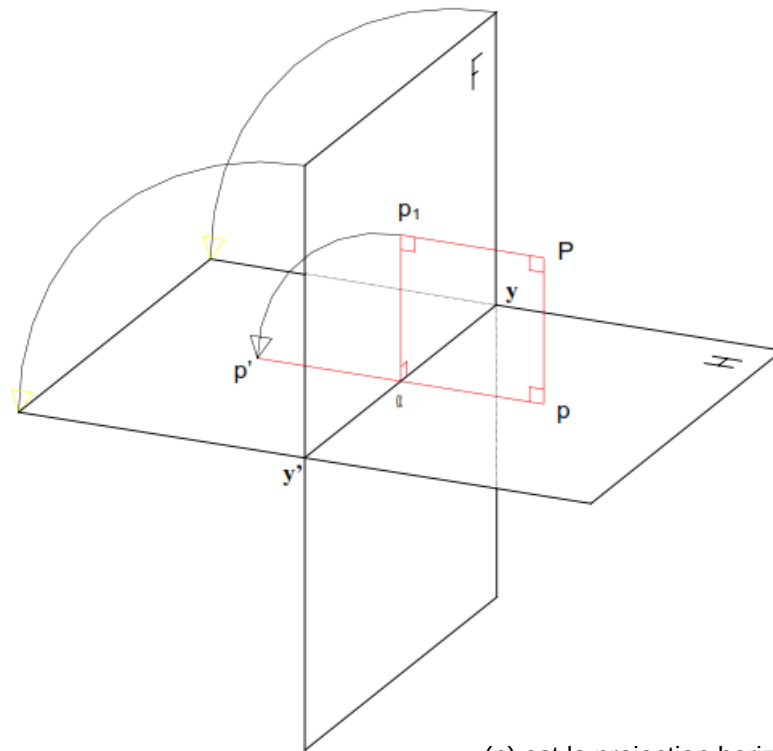
1.2.1 Représentation du point :

Soit un point (P) de l'espace. Ce point (P) se projette horizontalement sur le plan (**H**) en (p) et frontalement sur le plan (**F**) en (p1). Le plan (pPp1) ainsi défini est perpendiculaire aux deux plans de projection (**H**) et (**F**), et donc à la ligne de terre en (α).

Les points (Ppa p1) définissent un rectangle.

Les droites (pa) et (p1) sont perpendiculaires à la ligne de terre (y'y).

Ainsi, lorsque le plan frontal est amené en coïncidence avec le plan horizontal par rotation autour de (y'y), le point (p) décrit un quart de cercle de centre (α). Ce point (p1) vient donc se placer en (p') dans le prolongement de (pa). La droite (pp') est appelée **ligne de rappel** du point (P). Cette droite est donc *nécessairement* perpendiculaire à la ligne de terre (y'y).



(p) est la projection horizontale de (P).
 (p') est la projection frontale de (P).

1.2.2 Epure du point : cote et éloignement

Un point de l'espace est donc figuré sur une épure par ses deux projections orthogonales sur les deux plans de projections. Ces deux projections sont situées sur une même perpendiculaire à la ligne de terre appelée **ligne de rappel**.

On appelle **éloignement** d'un point la distance de ce point au plan frontal de projection.

$$\text{Eloignement de } (P) = (Pp1) = (pa).$$

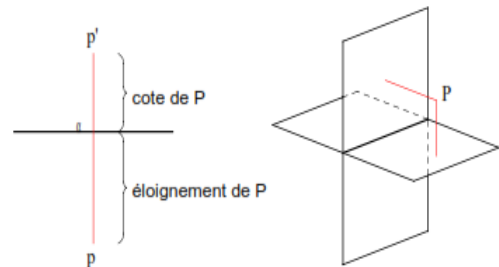
L'éloignement d'un point est considéré comme positif si ce point est situé en avant du plan frontal (1er et 4ème dièdre), il est négatif si ce point est situé en arrière du plan frontal (2ème et 3ème dièdre).

On appelle **cote** (ou **attitude**) d'un point la distance de ce point au plan horizontal de projection.

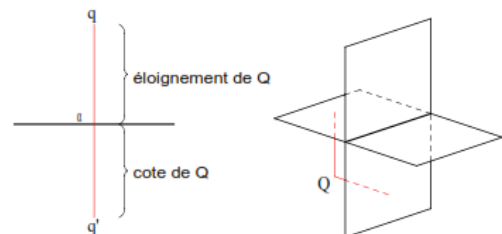
$$\text{Cote de } (P) = (Pp) = (p'a).$$

La cote d'un point est considérée comme positive si ce point est situé au-dessus du plan horizontal (1er et 2ème dièdre), elle est négative si le point est situé au-dessous du plan horizontal (3ème et 4ème dièdre).

L'épure ci-contre montre que le point (P), se projetant frontalement en (p') et horizontalement en (p), appartient au 1er dièdre. Son éloignement et sa cote sont positifs ; le point (P) est donc situé en avant du plan frontal et au-dessus du plan horizontal.



L'épure ci-contre montre que le point (Q), se projetant frontalement en (q') et horizontalement en (q), appartient au 3ème dièdre. Son éloignement et sa cote sont négatifs ; le point (Q) est donc situé en arrière du plan frontal et au-dessous du plan horizontal.



1.2.3 Synthèses : les positions diverses d'un point dans l'espace :

Dièdre/Plan	Cote	Eloignement
I	>0	>0
II	>0	<0
III	<0	<0
IV	<0	>0
H	0	<0 ; 0 ; >0
F	<0 ; 0 ; >0	0

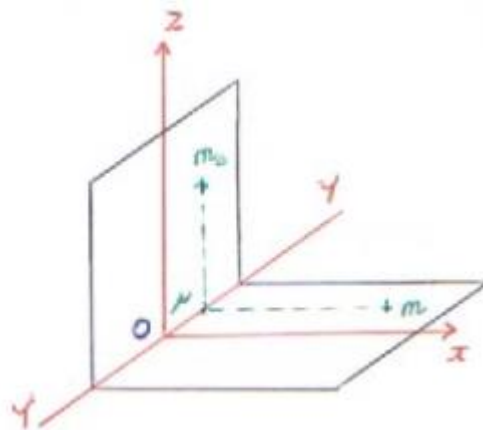
1.2.4 Coordonnées du point

Soit O un point pris comme origine sur la (l.t.), pour situer un point M, il faut connaître :

- ✓ Sa cote
- ✓ Son éloignement
- ✓ La position de μ sur l'axe yy' (ou encore à quel plan de profil appartient M).

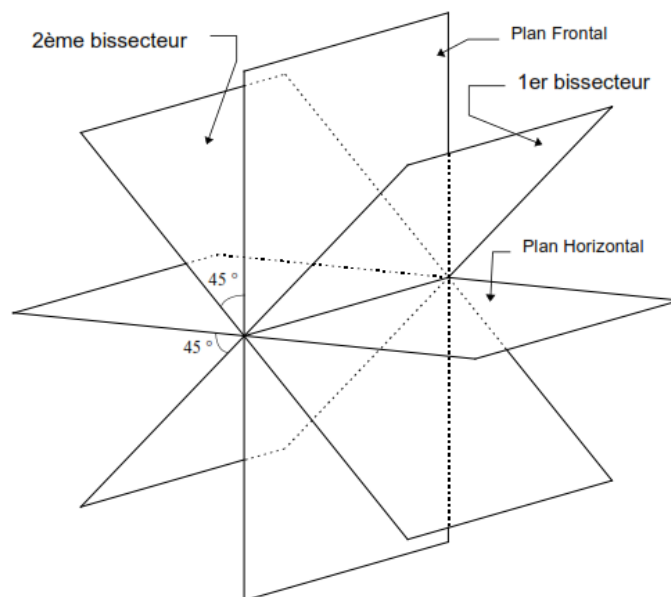
Conclusion :

$\overline{x=\mu m}$ éloignement
 $\overline{y=O\mu}$
 $\overline{z=\mu m_0}$ cote



1.2.5 Les plans bissecteurs :

Par convention, on subdivise les 4 dièdres par deux plans médians appelés **bissecteurs**. Ces plans bissecteurs sont perpendiculaires et forment un angle de 45° avec les plans de projections. Les points appartenant aux plans bissecteurs ont donc pour caractéristique d'être à égale distance du plan de projection horizontal et du plan de projection vertical. ***Les cotes et éloignements de tels points sont donc égaux en valeur absolue.***

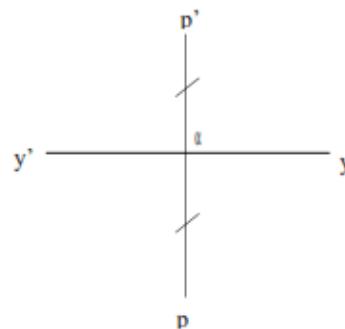
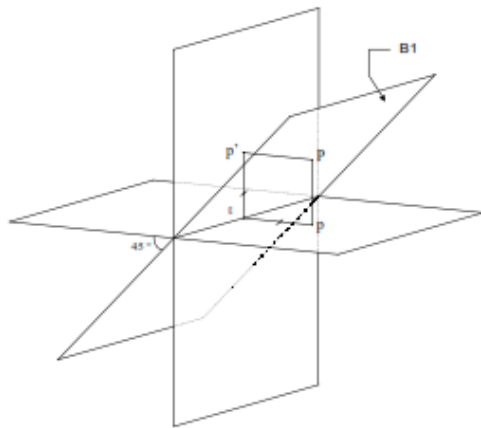


Soit (P) un point du premier bissecteur (B1).

(P) est à égale distance du plan frontal et du plan horizontal. Il appartient au 1er ou au 3ème dièdre.

Cote et éloignement sont donc de même signe.

$$\text{Éloignement (P)} = \text{Cote (P)}$$

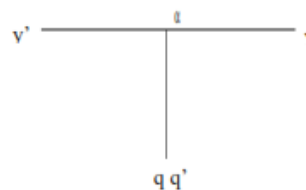
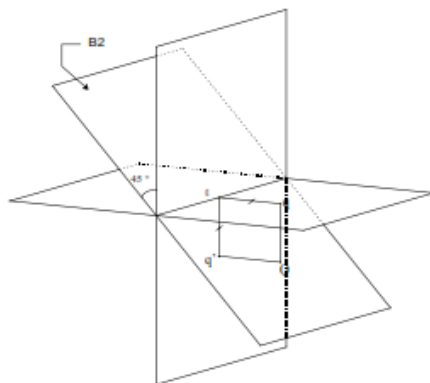


Soit (Q) un point du second bissecteur (B2).

(Q) est à égale distance du plan frontal et du plan horizontal. Il appartient au 2ème ou au 4ème dièdre.

Cote et éloignement sont par conséquent de signe opposé.

$$\text{Éloignement (Q)} = - \text{Cote (Q)}$$



I.2.6 Applications

Exercice n°1 :

Réaliser l'épure des points suivants :

$$\begin{aligned} \text{Points} \in \parallel E_1 \parallel : & \begin{cases} A(22, 20, ?) & A \in [H] \\ B(16, 42, 8) & \\ C(?, 65, 25) & C \in [B_1] \\ D(10, 92.5, 28) & \\ E(?, 119.5, 41.5) & E \in [F] \end{cases} \\ \text{Points} \in \parallel E_2 \parallel : & \begin{cases} F(?, 18, 34) & F \in [F] \\ G(-12, 44, 41) & \\ I(?, 67.5, 27) & I \in [B_2] \\ J(-45, 96.5, 35) & \\ K(-20, 122.5, ?) & K \in [H] \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice n°2 :

1- Placer sur une épure les projections des points suivants : (Unité : cm)

- a) $M_1(5, 2, 2)$
- b) $M_2(-2, 2, -5)$
- c) M_3 tel que $M_3 \in [B_1]$
- d) M_4 tel que $M_4 \in [H]$; $M_4(3, 4, ?)$

2- Après avoir placé les projections des points **A (5,5,2)**, **B (5,6,2)**, **C (5,7,2)**, placer les projections des points suivants :

- D**, symétrique de **A** par rapport au plan frontal de projection.
- E**, symétrique de **B** par rapport au plan horizontal de projection.
- F**, symétrique de **C** par rapport à la ligne de terre.

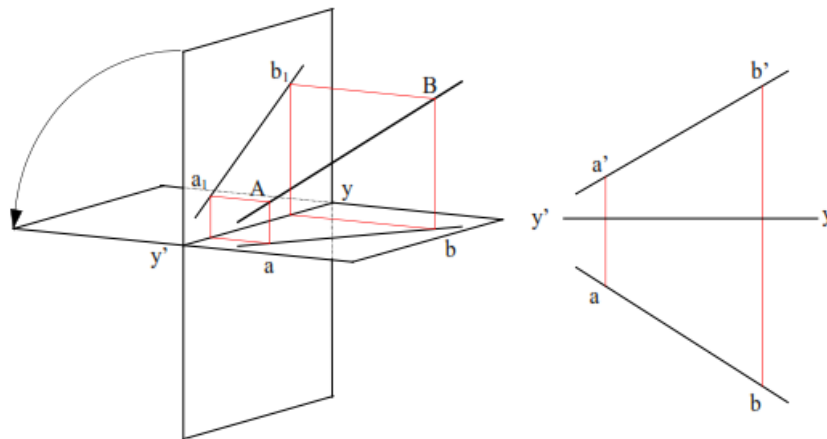
II.2 LA DROITE :

II.2.1 Représentation d'une droite quelconque

Rappels : une droite peut entièrement être définie par deux points distincts.

Pour déterminer une droite dans l'épure Il suffira donc de connaître deux de ses points par leurs projections horizontales et verticales. La droite sera ainsi elle-même définie par sa projection horizontale et sa projection frontale.

Soient (A) et (B) deux points distincts de l'espace. Par ces deux points passe une et une seule droite. Soit (a) et (b) les projections horizontales des points (A) et (B) et (a') (b') leurs projections frontales. Par (a) et (b) passe une et une seule droite : **la projection horizontale de la droite (AB)**, et par (a') et (b') passe une et une seule droite : **la projection frontale de la droite (AB)**.



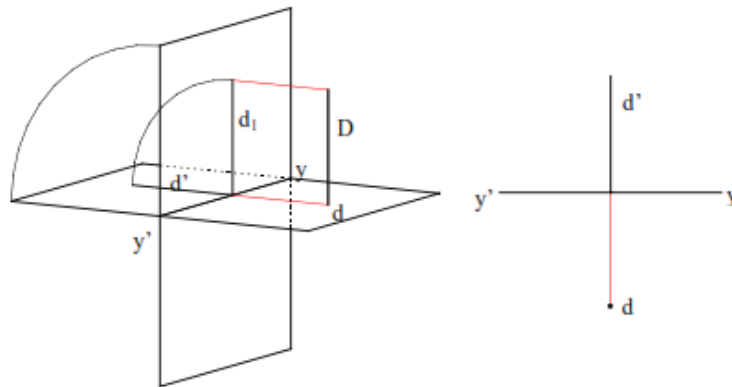
II.2.2 Droites remarquables :

Les droites particulières, qui peuvent poser certains problèmes de construction, sont les droites parallèles ou perpendiculaires aux plans de projection, ou encore situées dans les plans bissecteurs.

II.2.2.1 Droite verticale :

Est dite « **verticale** » toute droite perpendiculaire au plan horizontal de projection. Sa projection frontale est donc perpendiculaire à la ligne de terre ($y'y$), et sa projection horizontale se réduit à un point.

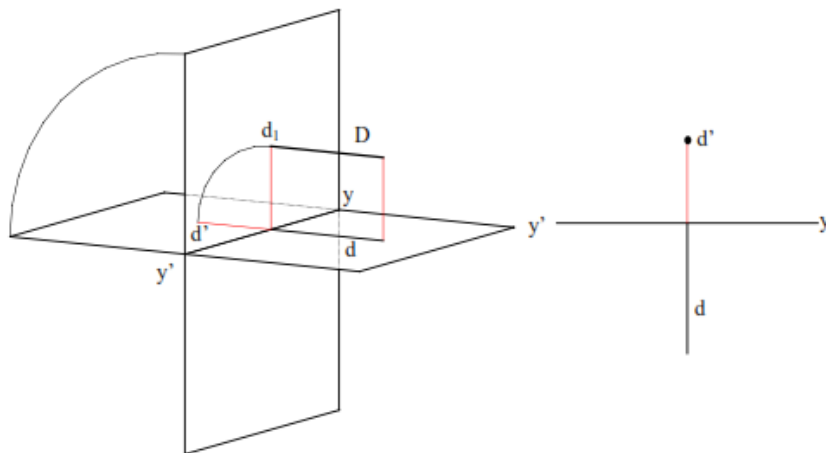
Remarque : Tous les points d'une droite verticale ont même éloignement.



II.2.2.2 Droite de bout :

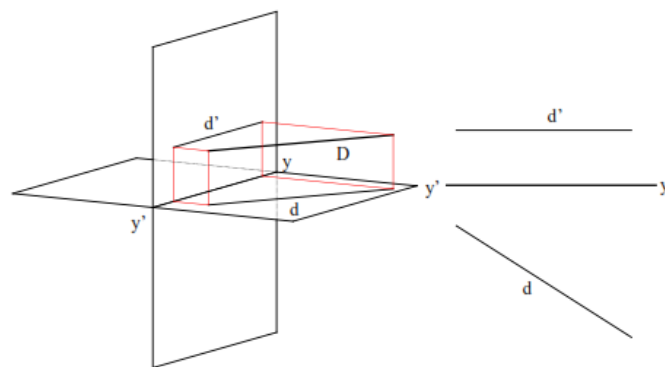
Est dite droite « **de bout** » toute droite perpendiculaire au plan frontal de projection. Sa projection horizontale est perpendiculaire à la ligne de terre ($y'y$) et sa projection frontale est réduite à un point.

Remarque : Tous les points d'une droite de bout ont même cote.



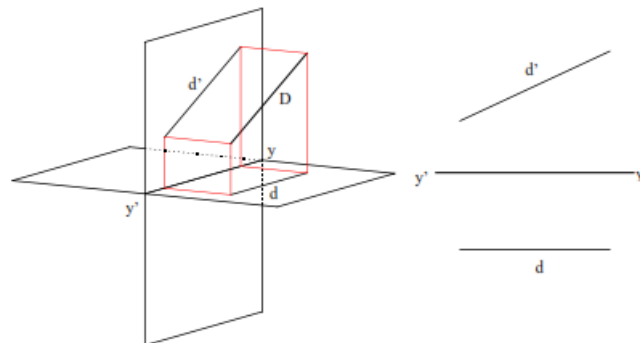
II.2.2.3 Droite **horizontale** :

Est dite « **horizontale** » toute droite parallèle au plan horizontal de projection. Tous les points d'une horizontale ont donc la même cote et sa projection frontale est parallèle à la ligne de terre ($y'y$).



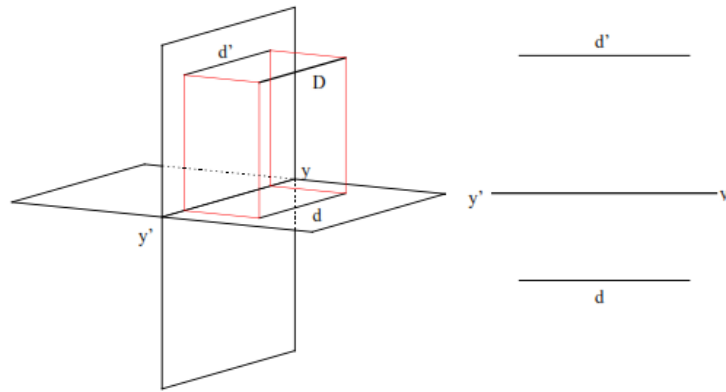
II.2.2.4 Droite **frontale** :

Est dite « **frontale** » toute droite parallèle au plan frontal de projection. Tous les points d'une droite frontale ont donc le même éloignement et sa projection horizontale est parallèle à la ligne de terre.



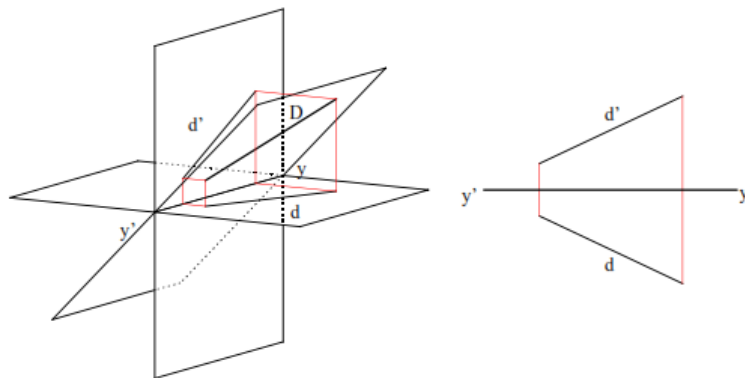
II.1.2.2.5 Droite **horizonto-frontale** :

Est dite « **horizonto-frontale** » toute droite parallèle aux deux plans de projection. Tous les points d'une telle droite ont donc même cote et même éloignement. Ses projections sont elles-mêmes parallèles à la ligne de terre ($y'y$)

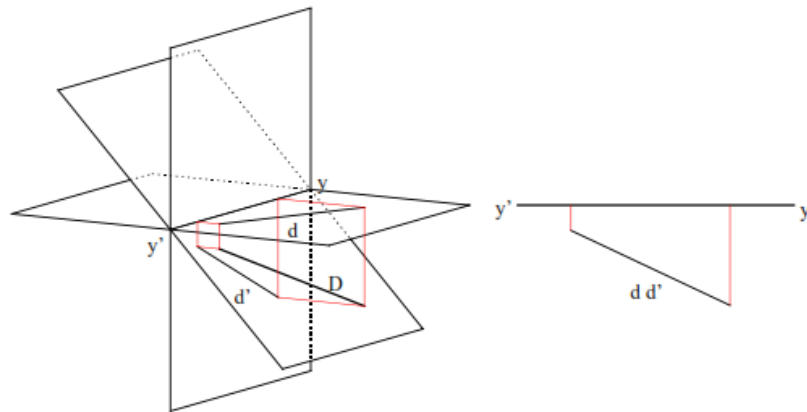


II.2.2.6 Droite appartenant à un plan bissecteur :

Tous les points d'une telle droite sont à équidistance des plans de projection. Si la droite appartient au 1er bissecteur, ses projections horizontale et verticale seront symétriques par rapport à la ligne de terre ($y'y$).

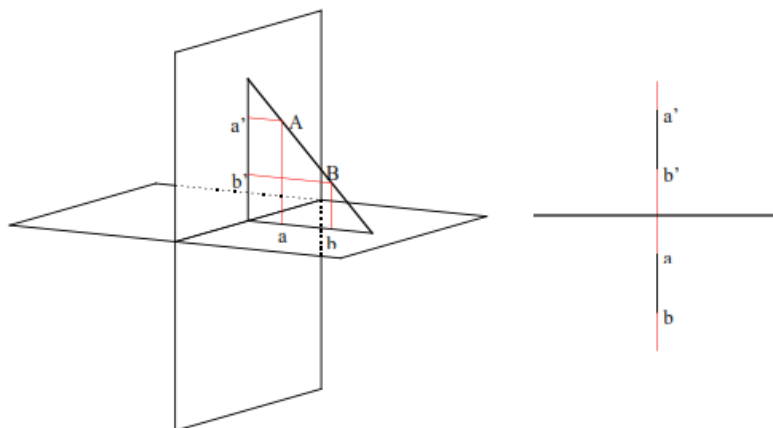


Si la droite appartient au 2ème bissecteur, ses deux projections seront confondues :



II.2.2.7 Droite de profil :

Est dite « **de profil** » toute droite appartenant à un plan perpendiculaire à la ligne de terre, et ainsi aux deux plans de projections. Les deux projections d'une telle droite sont donc elles-mêmes perpendiculaires à la ligne de terre et alignées sur une même ligne de rappel. Le problème est que toutes les droites appartenant à un même plan perpendiculaire à la ligne de terre ont les mêmes projections. On ne peut alors définir une telle droite qu'en en caractérisant deux de ses points.



II.2.2.8 Applications

Exercice n° 1

Déterminer les projections des droites suivantes :

Épure n° 1 : Droite quelconque (D) définie par les points

$$A \text{ et } B \Rightarrow \begin{cases} A(15, 10, ?), A \in [B_1], A \in (D). \\ B(7, 39,5, 32), B \in (D). \end{cases}$$

Épure n° 2 : Horizontale (D) définie par les points

$$C \text{ et } E \Rightarrow \begin{cases} C(12, 10, 25), C \in (D), \\ E(18, 45, ?), E \in (D). \end{cases}$$

Épure n° 3 : Frontale (D) définie par les points

$$F \text{ et } G \Rightarrow \begin{cases} F(10, 12, 13), F \in (D), \\ G(?, 40,5, 19,5), G \in (D). \end{cases}$$

Épure n° 4 : Verticale (D) passant par

$$I \Rightarrow I(14, 28,5), I \in (D).$$

Épure n° 5 : Droite de bout (D) passant par

$$J \Rightarrow J(10, 32, 6,5), J \in (D).$$

II.2.2.9 Traces d'une droite sur les plans de projection :

On appelle trace d'une droite ses points d'intersection avec les plans de projection :

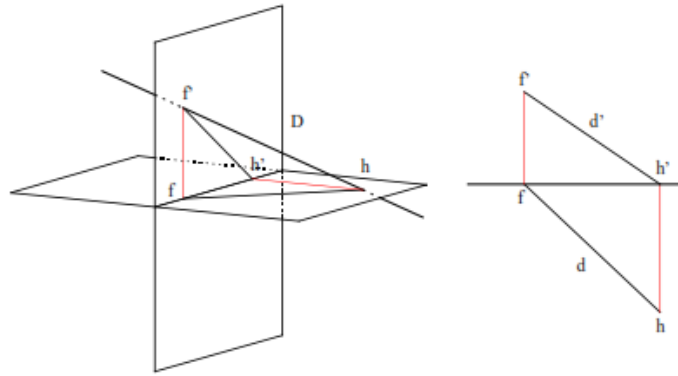
- $D \cap H \Rightarrow$: trace Horizontale (P)
- $D \cap F \Rightarrow$: trace Frontale (Q)

On appelle **trace frontale** de la droite l'intersection de cette droite avec le plan frontal de projection.

On appelle **trace horizontale** de la droite l'intersection de cette droite avec le plan horizontal de projection.

La trace frontale de la droite est un point d'éloignement nul puisque ce point appartient au plan frontal. La recherche de ce point se réduit donc à la recherche du point de la droite d'éloignement nul.

La trace horizontale de la droite est un point de cote nulle puisque ce point appartient au plan horizontal. La recherche de ce point se réduit donc à la recherche du point de la droite de cote nulle.



9.3 Applications :

Ponctuation d'une droite :

Définition :

La ponctuation d'une droite consiste à séparer les parties vues et les parties cachées. L'observateur est placé à l'infini dans le 1^{er} quadrant et les plans de projections sont opaques.

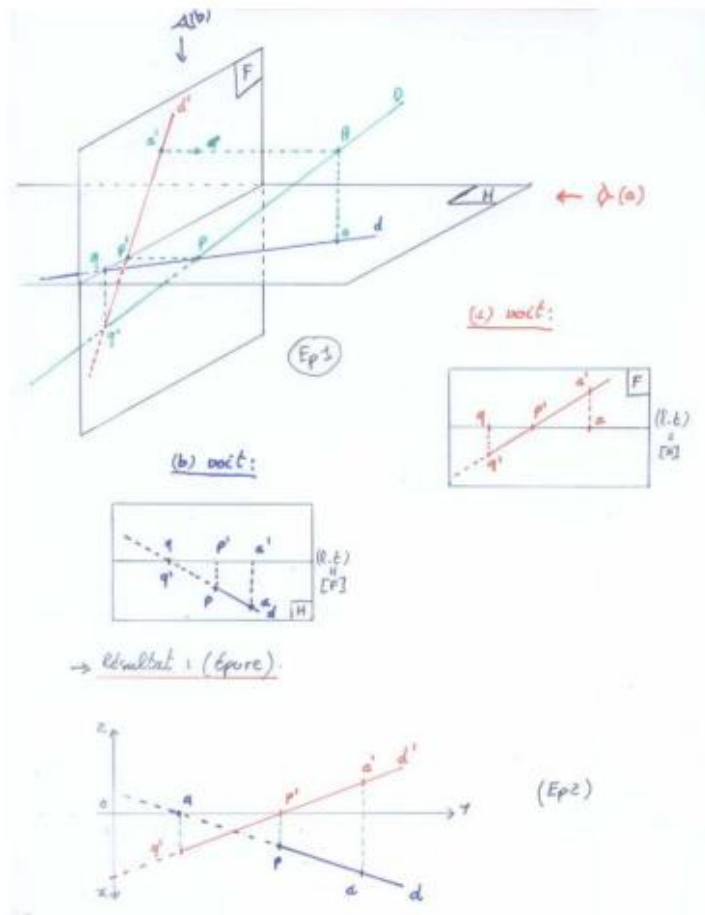
(1) Pour ponctuer la projection horizontale, on suppose un observateur placé à l'infini vers les cotes positives.

(2) Pour ponctuer la projection frontale, on suppose un observateur placé à l'infini vers les éloignements positifs.

1 point de cote > 0 est vu et 1 point de cote < 0 est caché.

1 point d'éloignement > 0 est vu et 1 point d'éloignement < 0 est caché.

Représentation :



II.3 Le plan :

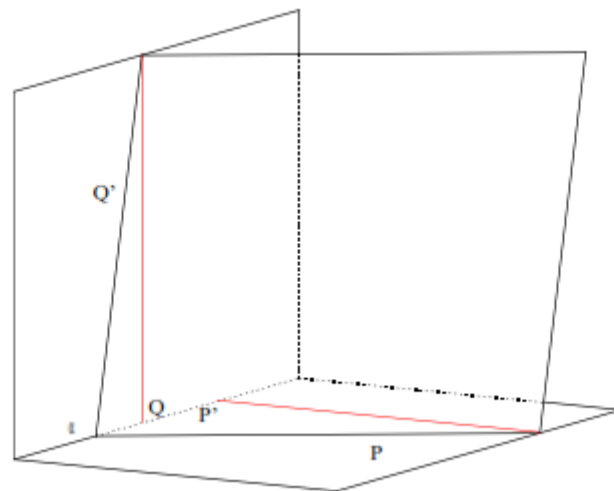
3.1 Détermination du plan. Traces du plan :

Rappel géométrique : Un plan est défini par

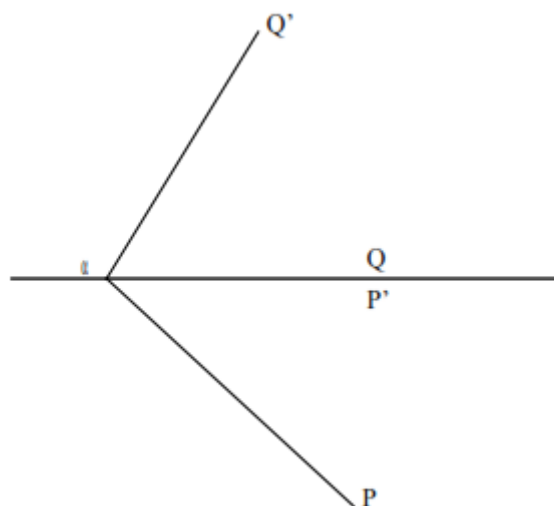
- 3 points non colinéaires
- 1 droite et un point 1 extérieur à cette droite.
- 2 droites concourantes en un point.
- 2 droites parallèles distinctes.

En géométrie descriptive, un plan est le plus souvent caractérisé par deux droites concourantes, et notamment par ses **traces**.

On appelle traces d'un plan les *droites* suivant lesquelles celui-ci coupe les plans de projection. Ces deux droites la trace horizontale (P) et la trace frontale (Q) du plan se rencontrent sur la ligne de terre en un point (α).



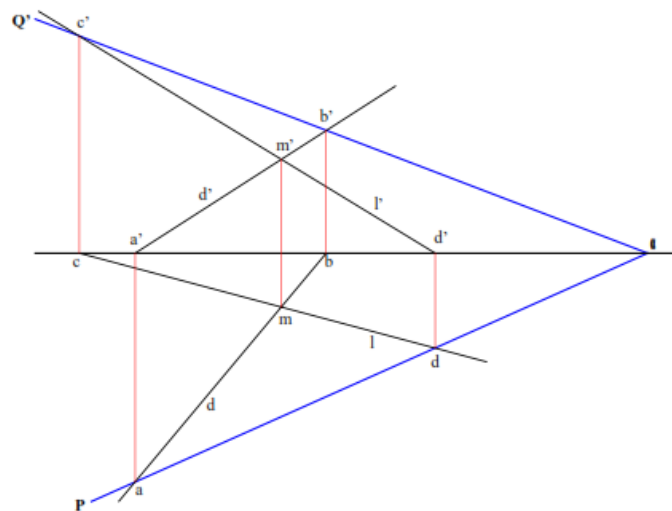
Le plan est ainsi entièrement déterminé dans l'épure par ses traces horizontale et frontale.



Exemple : Construire les traces d'un plan défini par deux droites concourantes

Soient (D) et (L) deux droites concourantes en un point (M). On obtient les traces du plan défini par ces droites en cherchant les traces horizontales et frontales de ces droites.

Les traces horizontales (A) et (B) des droites appartiennent au plan horizontal de projection ainsi qu'au plan défini par ces droites. Elles appartiennent donc à la trace horizontale de ce plan. La trace horizontale du plan est donc la droite qui joint les deux traces horizontales des droites. De même, les traces frontales (C) et (D) des droites appartiennent au plan frontal de projection ainsi qu'au plan défini par ces droites. Elles appartiennent donc à la trace frontale de ce plan. La trace frontale du plan est donc la droite qui joint les deux traces frontales des droites.

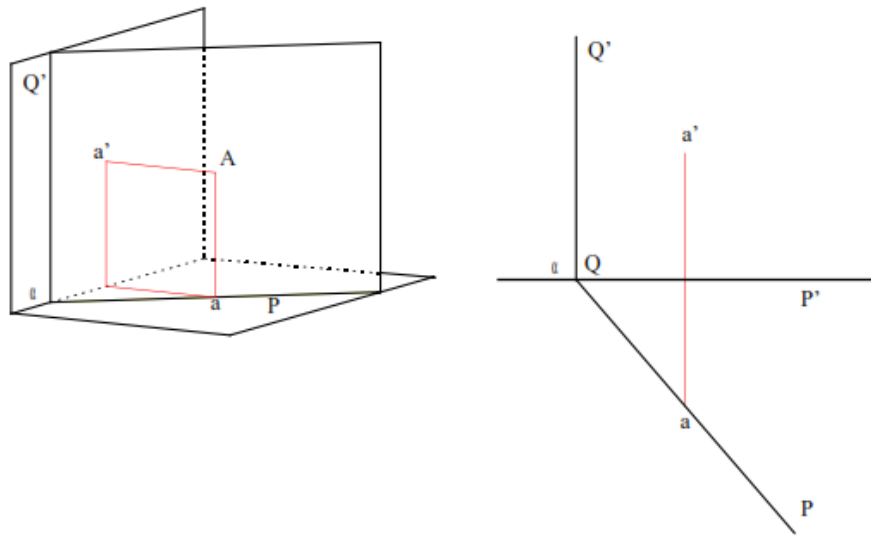


3.2 Plans remarquables :

Les plans remarquables sont les plans parallèles ou orthogonaux aux plans de projections ou aux plans bissecteurs.

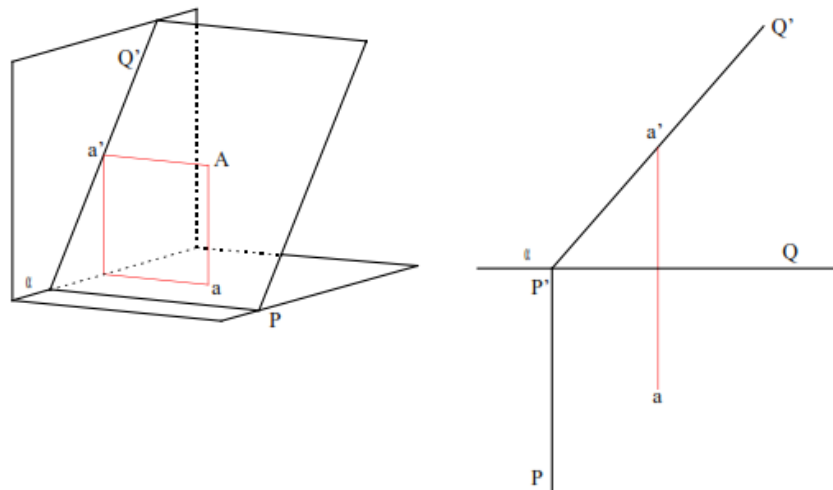
3.2.1 Plan **vertical** :

Est dit « **vertical** » tout plan perpendiculaire au plan horizontal de projection. Sa trace frontale est donc perpendiculaire à la ligne de terre et tous les points appartenant à ce plan se projettent horizontalement sur sa trace horizontale.



3.2.2 Plan **de bout** :

Est dit « **de bout** » tout plan perpendiculaire au plan frontal de projection. Sa trace horizontale est donc perpendiculaire à la ligne de terre et tous les points appartenant à ce plan se projettent frontalement sur sa trace frontale.



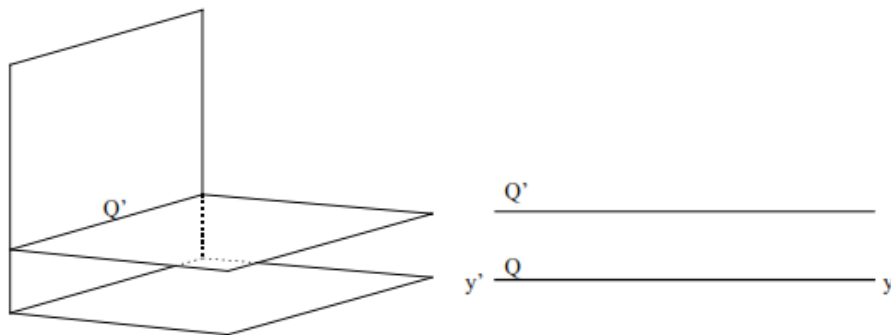
Remarque :

- *Le plan frontal est un plan vertical particulier*

- *Le plan horizontal de projection est un plan de bout particulier.*

3.2.3 Plan **horizontal** :

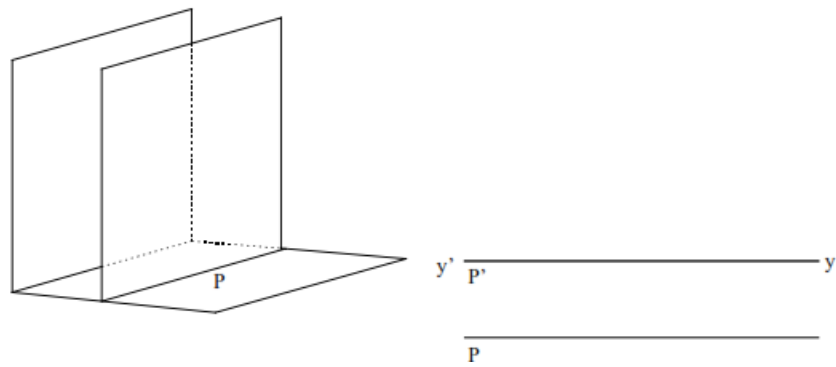
Est dit « **horizontal** » un plan parallèle au plan horizontal de projection. Tous ses points ont même cote. Il n'a donc pas de trace horizontale et sa trace frontale est parallèle à la ligne de terre.



Remarque : *tout plan horizontal est aussi un plan de bout.*

3.2.4 Plan **frontal** :

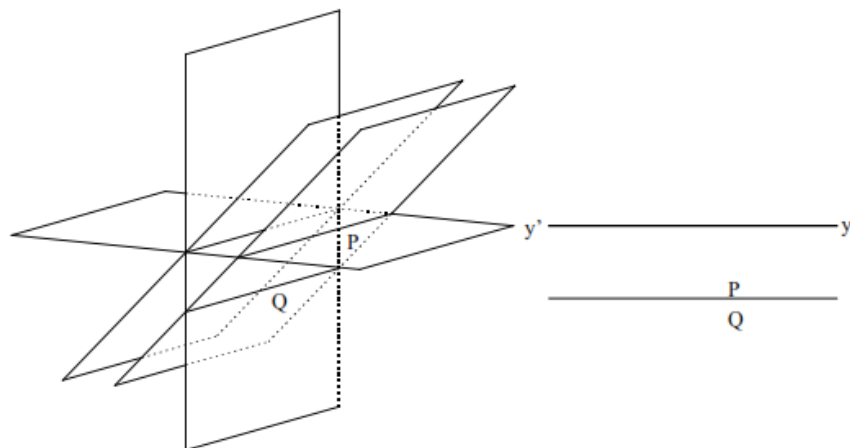
Est dit « **frontal** » un plan parallèle au plan frontal de projection. Tous ses points ont même éloignement. Il n'a donc pas de trace frontale et sa trace horizontale est parallèle à la ligne de terre.



Remarque : Tout plan frontal est aussi un plan vertical.

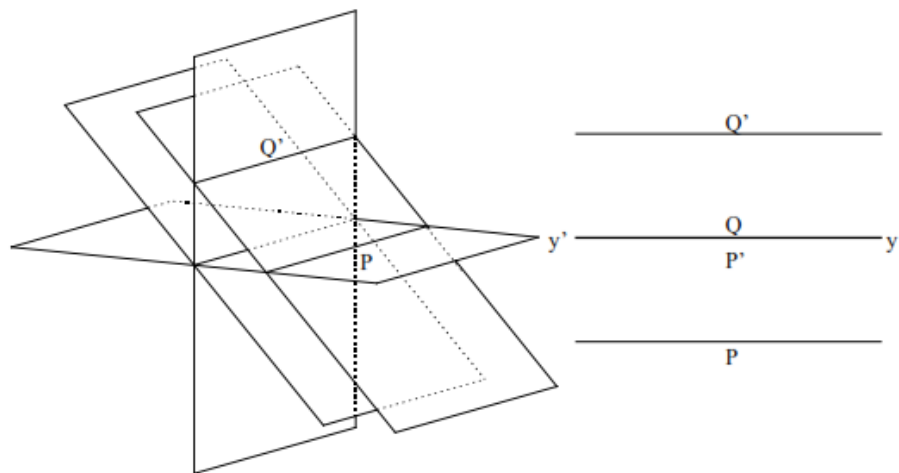
3.2.5 Plan **parallèle au premier bissecteur** :

Un plan parallèle au 1^{er} bissecteur a ses traces horizontale et frontale confondues et parallèles à la ligne de terre.



3.4.2.6 Plan **parallèle au deuxième bissecteur** :

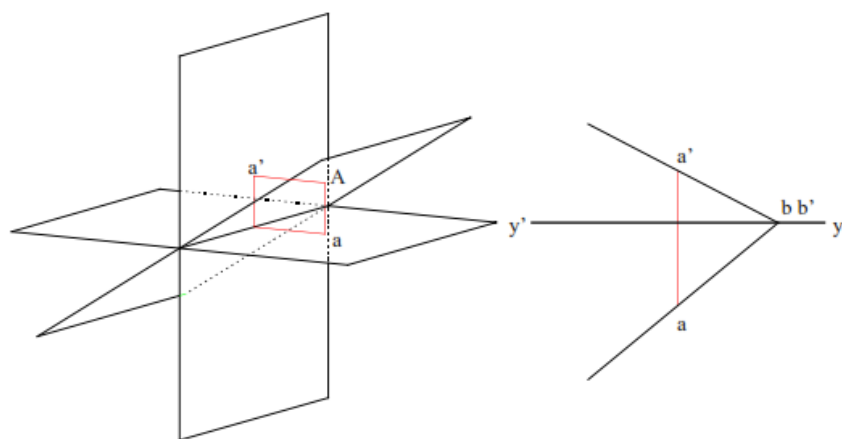
Un plan parallèle au 2^{ème} bissecteur a ses traces horizontale et frontale parallèles à la ligne de terre et symétriques par rapport à celle-ci.



3.2.7 Plan **passant par la ligne de terre** :

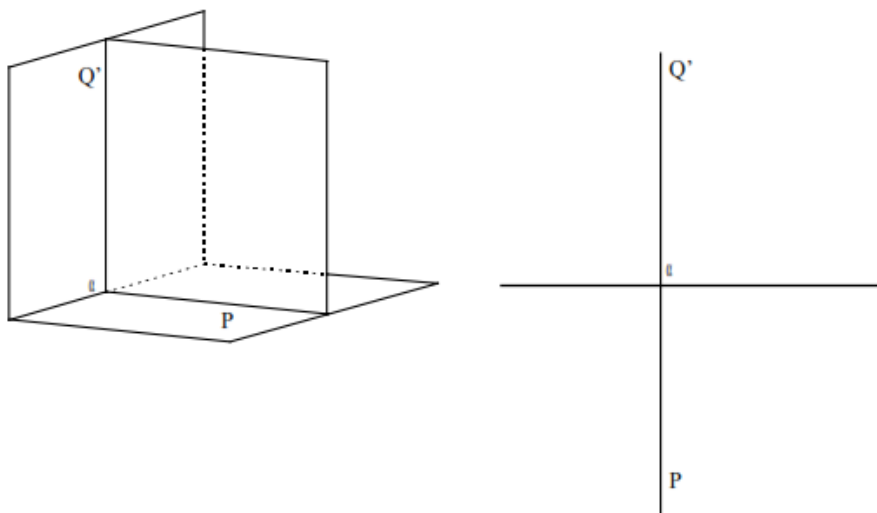
Un plan passant par la ligne de terre a ses traces confondues avec celle-ci. Pour définir un tel plan Il faut et il suffit de connaître un de ses points (A).

Toute droite joignant ce point et un point quelconque de la ligne de terre (B) appartient à ce plan.



3.2.8 Plan **de profil** :

Un plan de profil est perpendiculaire aux deux plans de projection, et donc à la ligne de terre. Ses traces horizontale et frontale sont alignées et perpendiculaires à la ligne de terre.



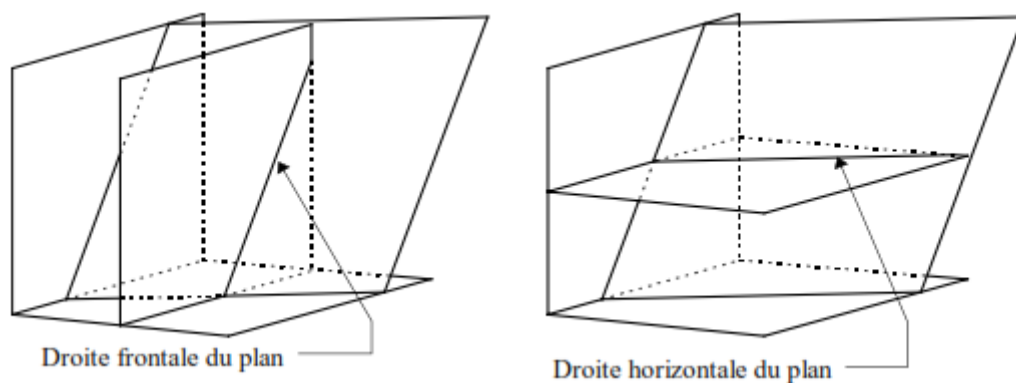
3.2.9 Droites principales d'un plan :

On appelle *droites principales* d'un plan les droites de ce plan parallèles au plan frontal ou au plan horizontal de projection, ainsi que les droites perpendiculaires à celles-ci, c'est-à-dire les lignes de plus grande pente (*ldpgp*).

3.2.9.1 Droites frontales et horizontales d'un plan :

Ce sont les droites appartenant au plan considéré et qui sont parallèles au plan frontal ou au plan horizontal de projection.

Les droites frontales d'un plan sont obtenues en coupant ce plan avec des plans frontaux, les droites horizontales en coupant le plan avec des plans horizontaux.



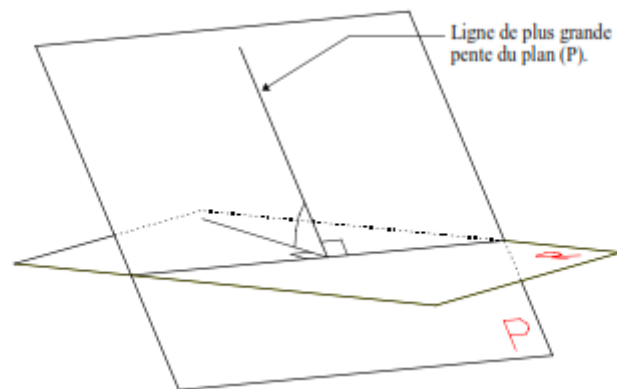
La trace frontale d'un plan est une droite frontale d'éloignement zéro de ce plan. De même, la trace horizontale du plan est la droite horizontale de cote zéro de ce plan.

1.4.3.2 Lignes de plus grande pente d'un plan (*ldpgp*) :

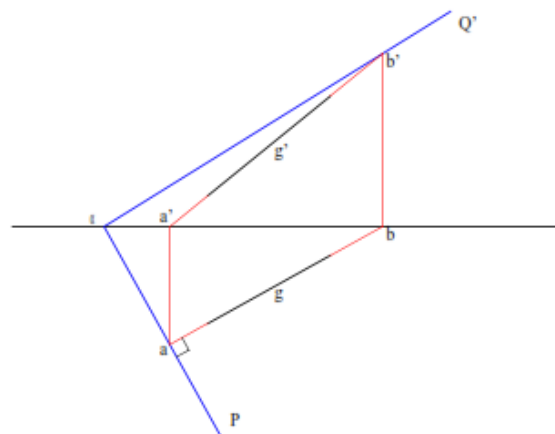
On appelle lignes de plus grande pente d'un plan en référence à un plan de projection les droites de ce plan qui forment le plus grand angle possible avec ce plan de projection. En géométrie descriptive, on distingue classiquement les lignes de plus grande pente avec le plan horizontal et les lignes de plus grande pente avec le plan frontal.

Théorème : Soient (P) et (R) deux plans se coupant selon une droite (D). Les lignes de plus grande pente du plan (P) par rapport au plan de référence (R) sont les droites de (P) perpendiculaires à (D).

Rappel géométrique : pour qu'un angle droit se projette en un angle droit, il faut et il suffit qu'un de ses cotés soit parallèle à ce plan.



La trace horizontale d'un plan représente la droite d'intersection de ce plan avec le plan horizontal de projection. Selon le plan de référence considéré, les lignes de plus grande pente du plan sont donc les droites perpendiculaires à la trace du plan correspondante. D'autre part, les droites horizontales ou frontales du plan étant parallèles respectivement aux traces horizontales ou frontales, les lignes de plus grande pente d'un plan sont également perpendiculaires aux droites horizontales ou frontales de ce même plan.



Remarque : Une ligne de plus grande pente est suffisante pour caractériser entièrement un plan. En effet, connaissant la ligne de plus grande pente (G) avec, par exemple, le plan horizontal, il est possible de construire sa trace horizontale, soit le point (A). Nous savons que la trace horizontale du plan, soit la droite (P), passe par le point (A). Nous savons que la trace horizontale du plan, soit la droite (P), passe par le point (A) et est perpendiculaire à (G). Une fois construite, cette trace horizontale, nous donne le point (a) intersection de cette droite avec la ligne de terre. Ce point (a) appartient également à la trace frontale (Q') du plan. Il ne reste alors qu'à construire

la trace frontale de (G), soit le point (B), pour obtenir un second point de cette trace frontale du plan.

2.3.9 Applications

Déterminer les traces d'un plan [P] défini par les deux droites concourantes (D) et (Δ).

Épure n° 1 : La droite (Δ) est définie par les points

$$A \text{ et } B \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A(15, 75, 13), A \in (\Delta) \\ B(-7, 115, 65), B \in (\Delta) \end{array} \right\} (\Delta) \in [P].$$

La droite (D) est définie par les points

$$A \text{ et } C \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = (D) \cap (\Delta) \\ C(-5, 50, 20), C \in (D) \end{array} \right\} (D) \in [P].$$

Épure n° 2 : La droite (D) passe par le point

$$I \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (D) \parallel (y'y), \\ I(15, 80, 25), I \in (D), (D) \in [P]. \end{array} \right.$$

La droite (Δ) passe par les points

$$I \text{ et } J \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} I = (D) \cap (\Delta), \\ J(7, 104, 42), J \in (\Delta), (\Delta) \in [P]. \end{array} \right.$$

Exercice 1

Sur l'épure n°1, le plan (P) est représenté par deux droites (u, u') et (v, v').

Construire les traces du plan (P).

Exercice 2

Sur l'épure n°2, le plan (P) est représenté par deux droites parallèles (u, u') et (v, v').

a) Construire deux points (a, a') et (b, b') appartenant au plan (P)

b) Construire deux droites (d, d') et (δ, δ') appartenant au plan (P)

Exercice 3

Un plan P est défini par les deux droites D1 et D2 :

D1 passe par les points A (15, 75, 13) et B (-7, 115, 65)

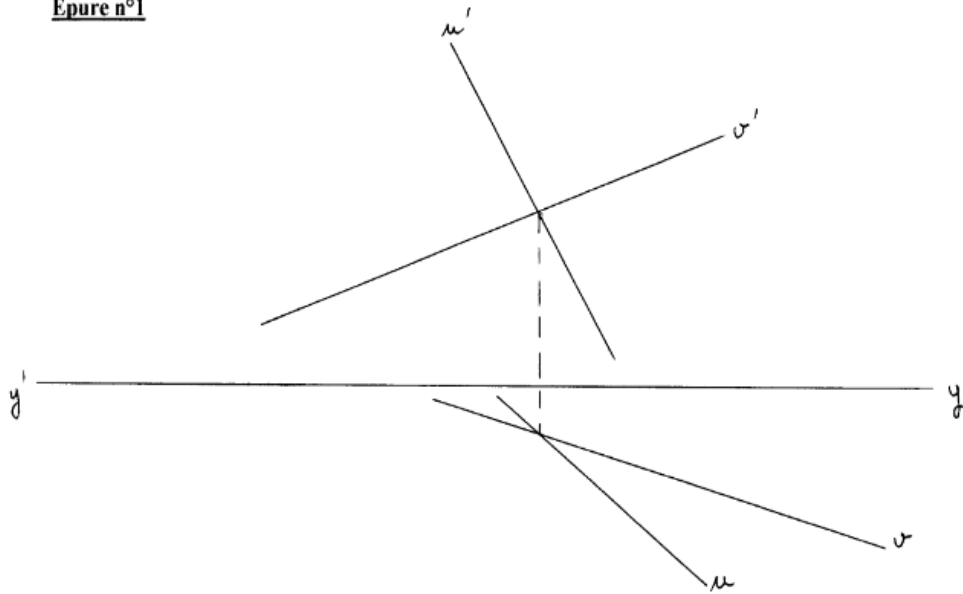
D2 passe par le point A et le point C (-5, 50, 20)

1 - Représenter les droites D1 et D2 sur une épure

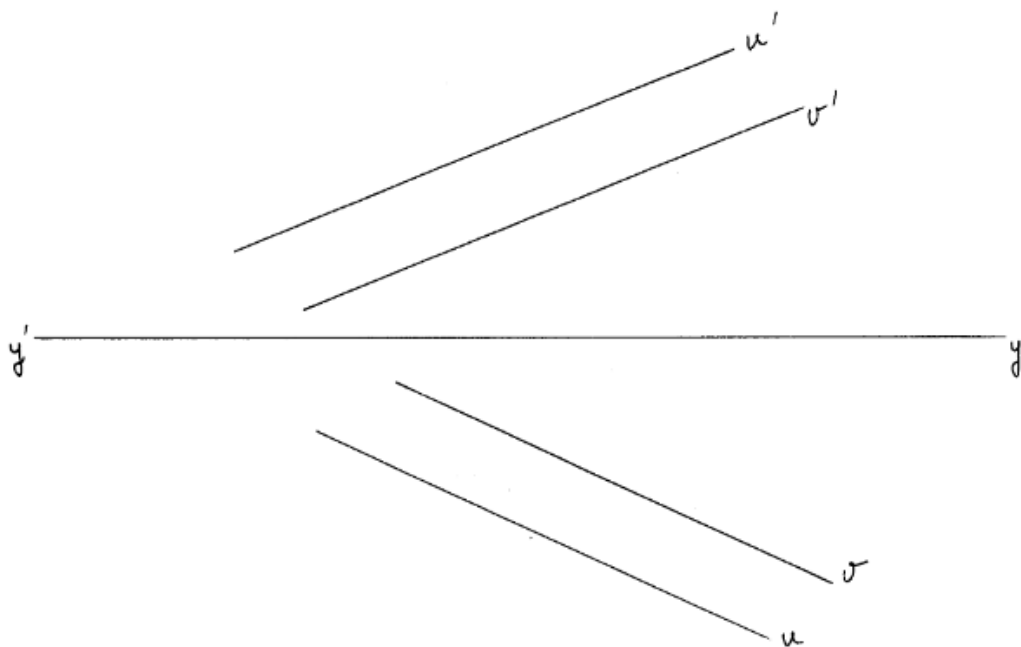
2 - Déterminer les traces de ce plan.

3 - Déterminer le point E du plan tel que E (?, 135, 45)

Epure n°1



Epure n° 2



Définir les traces des plans suivants :

Épure n° 1 : Plan vertical [VE] passant par le point A

$$\Rightarrow \begin{cases} A(14,5, 45, 23), A \in [VE], \\ [VE] \cap [H] = (P), ((\overline{P}), (\overline{y'y})) = \frac{\pi}{6}. \end{cases}$$

Épure n° 2 : Plan de bout [BO] passant par le point B

$$\Rightarrow \begin{cases} B(17, 50, 30), B \in [BO], \\ [BO] \cap [F] = (Q), ((\overline{y'y}), (\overline{Q})) = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Épure n° 3 : Plan horizontal quelconque [H₁] passant par le point C

$$\Rightarrow C(25, 37, 17), C \in [H_1].$$

Épure n° 4 : Plan frontal quelconque [F₁] passant par le point E
 $E \Rightarrow E(29, 30,5, 10), E \in [F_1].$

II.4: CHANGEMENT DE PLAN FRONTAL

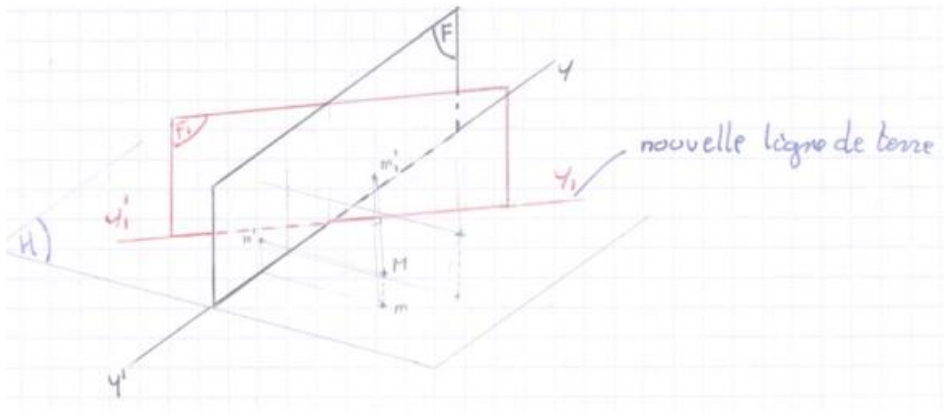
Problème :

Voir ce que l'on ne voit pas (cas d'une droite de profil)

Voir en vraie grandeur certains détails (distances, angle, etc.)

12 Principe :

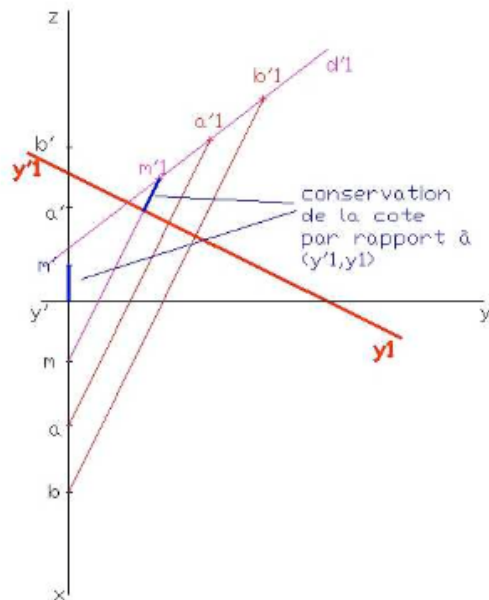
- On garde le plan horizontal (P.H.)
 - On prend un nouveau plan frontal (P.F.) (P.F)
- (P.F) non // à (P.F.) mais $\perp$ à (P.H.)
- On oriente positivement la nouvelle ligne de terre (y'_1, y_1)
 - La projection horizontale et la cote de chaque point ne sont pas modifiées.
 - Seule est changée sa projection frontale.



Applications

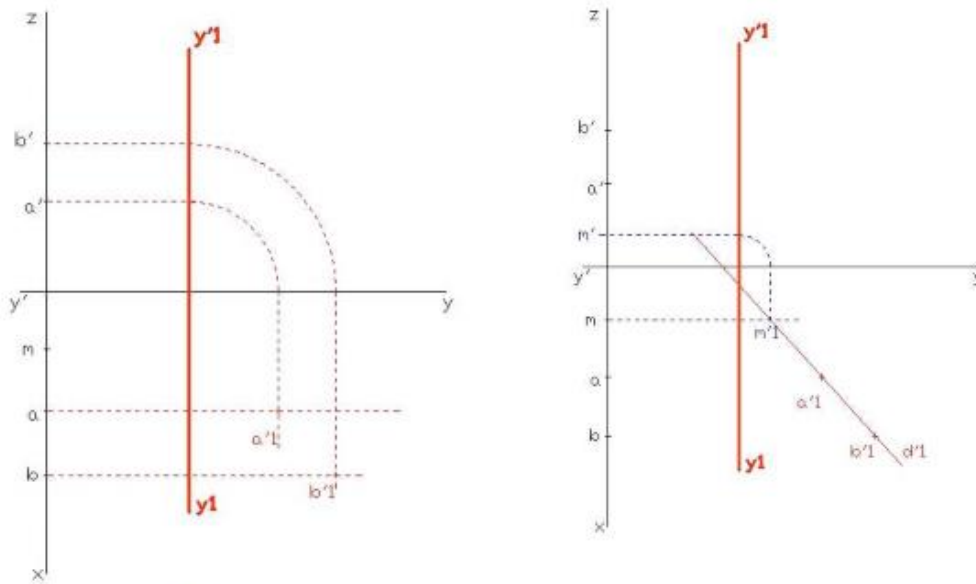
Droite de profil :

Soit m , trouver m' sa projection frontale.



1. Tracer une nouvelle (l.t.) $\Leftrightarrow$ nouveau P.F.
2. a'_1 , b'_1 , nouvelles projections frontales de A et B.
3. on appelle d'_1 , la nouvelle projection frontale de D.
4. on obtient m'_1 et on en déduit m' .

Si on prend $[PF_1]$ // plan de profil contenant (D)



Intérêt :

Le segment AB est vu en vraie grandeur.

$$[AB] = \overline{a_1b_1}$$

Exercice n°1 :

Tracer la droite de profil passant par A(5,0,25)
B(23,0,10)
Déterminer la projection frontale de M(12, ?, ?)

Exercice n°2 :

Déterminer les traces de (D) de profil passant par : A(7,0,35)
B(15,0,18)

Exercice n°3 :

La droite (D) est donnée par ses projections d et d', dont les équations sont :

$$\begin{cases} (d): y = \frac{1}{2}x - 1 \\ (d)': z = y - 1 \end{cases}$$

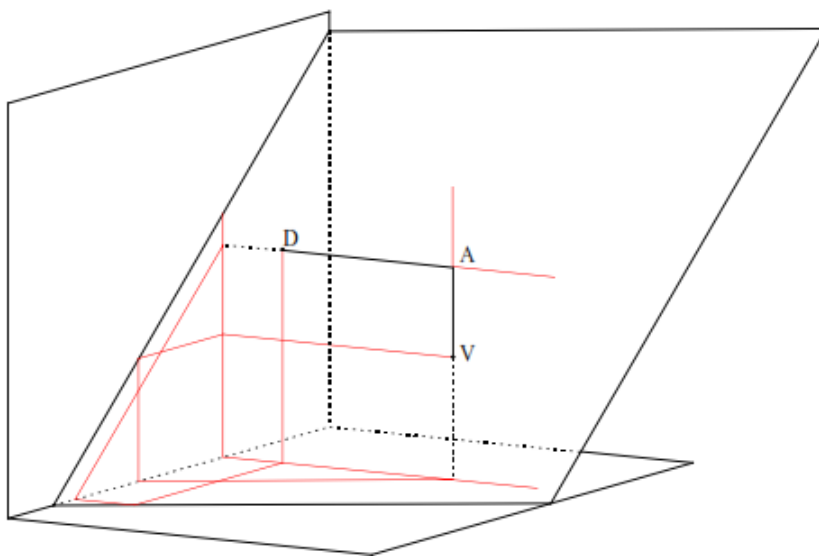
⇒ Déterminer l'angle que fait la droite (D) par rapport au plan horizontal.

3. LES OMBRES

3.1 Ombres propres

3.1.1 Position d'un point par rapport à un plan :

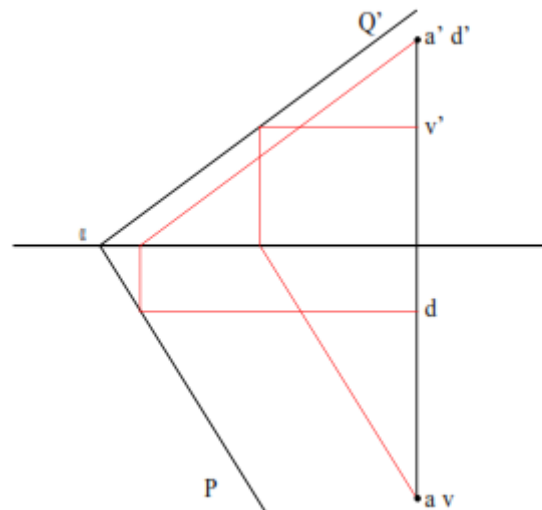
Problème : On cherche ici à déterminer la position d'un point relativement à un plan. Pour ce faire, on mène par ce point une droite de bout (perpendiculaire au plan frontal) et une droite verticale (perpendiculaire au plan horizontal), et on regarde le point de rencontre de chacune de ces droites avec le plan considéré.



On dira alors qu'un point (A) est au-dessus du plan considéré si sa cote est supérieure à celle de (V), intersection de la droite verticale issue de (A) avec ce plan. Le point (A) est dit en-dessous du plan si sa cote est inférieure à celle de (V).

De même, on dira que (A) est en avant du plan si son éloignement est supérieur à celui de (D), intersection de la droite de bout issue de (A) avec ce plan, et en arrière du plan si son éloignement est inférieur à celui de (D).

Dans cet exemple, (A) est en avant et au-dessus du plan considéré.

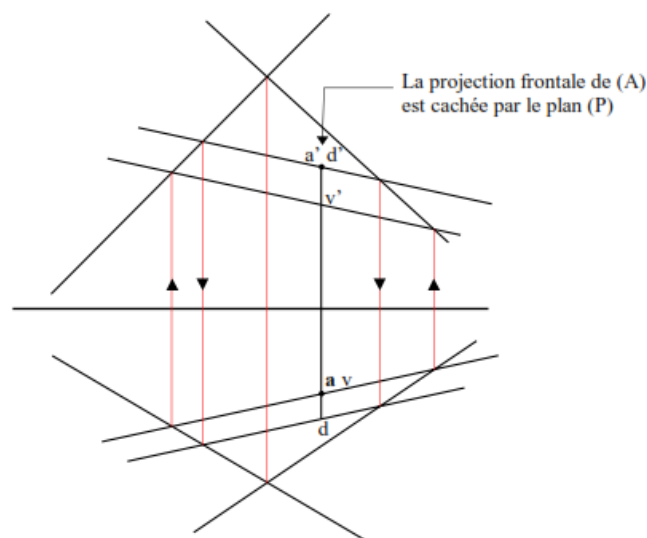


Exemple 1 : Cas d'un plan défini par deux droites concourantes :

Soit un plan (P) défini par deux droites concourantes et un point (A) donné. On commence donc par mener par (A) une droite de bout et une droite verticale. On recherche ensuite l'intersection de la droite de bout issue de (A) avec le plan (P), soit le point (D), et l'intersection de la droite verticale issue de (A) avec ce même plan, soit le point (V).

Dans l'épure ci-dessous, il apparaît que l'éloignement de (A) est inférieur à celui de (D), tandis que sa cote est supérieure à celle de (V).

Résultat : Le point (A) est donc situé au-dessus et en arrière de (P). Il sera donc vu en projection horizontale mais caché en projection frontale.

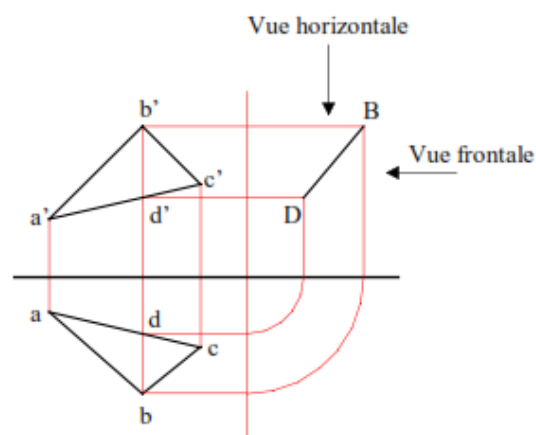


3.1.2 Faces d'un plan vues dans une épure :

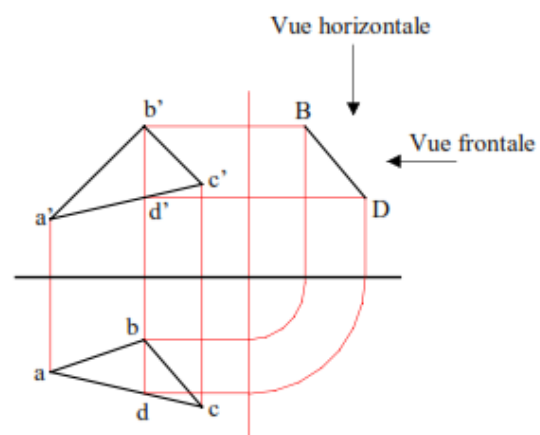
En projetant une plaque sur les plans de projection, suivant la position de la plaque dans l'espace, la projection frontale et la projection horizontale peuvent montrer la même face ou montrer deux faces différentes.

Dans une épure, le moyen de déterminer si une plaque est vue par ses deux faces (une en projection frontale et une en projection horizontale) ou si les deux projections montrent la même face est le suivant :

Soit une plaque définie par trois points (ABC). On mène par un des points de la plaque - ici le point (B) - une droite de profil appartenant à la plaque. Cette droite rencontre une arête de la plaque en un point (D). Et on compare ensuite les cotes et éloignements de ces deux points. Si (B) est le point de plus grande cote et de plus grand éloignement, les deux faces sont vues. Si (B) est le point de plus grande cote mais aussi de plus petit éloignement, une seule face est vue :



Les projections sont de sens contraire.
Une face est vue en projection horizontale et
l'autre face est vue en projection frontale



Les projections sont de même sens.
La même face est vue en projection
horizontale et en projection frontale

Donc, si les triangles (abc) et (a'b'c') des projections horizontale et frontale sont de même sens par rapport à la ligne de terre, alors une seule face est vue dans l'épure, s'ils sont de sens contraire, alors les deux faces sont vues.

3.1.3 Ombre propre d'une plaque :

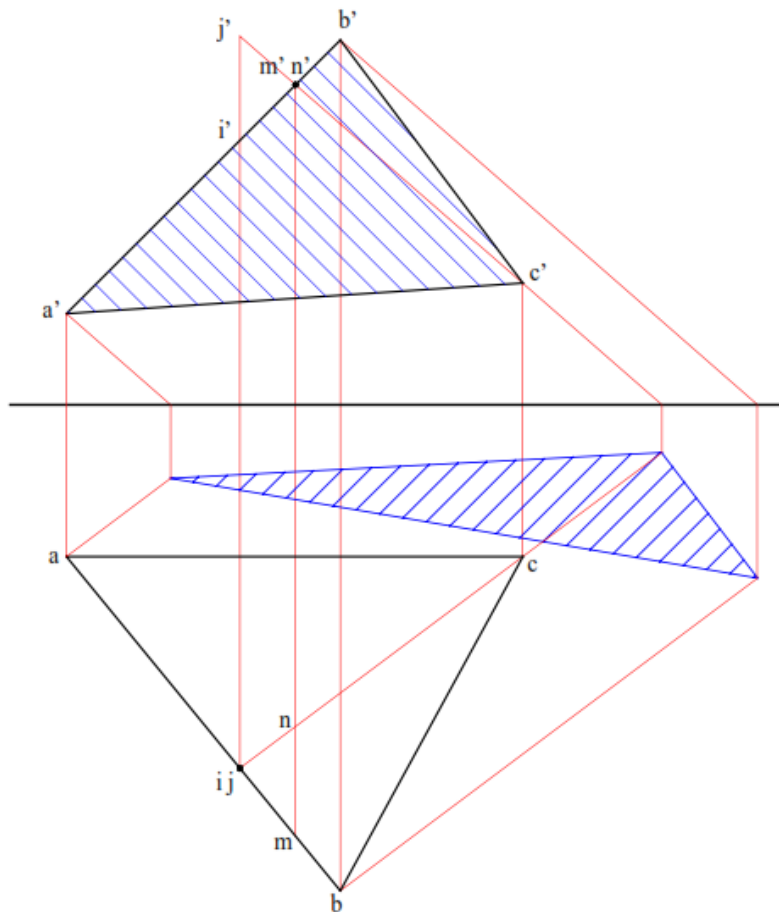
L'ombre propre d'une plaque est l'ombre portée sur la plaque elle-même. Lorsqu'une d'une plaque éclairée, l'une de ses faces est éclairée et l'autre est dans le noir. Nous avons vu que dans une épure, lorsque les deux faces d'une plaque sont vues, l'une l'est dans la projection horizontale et l'autre dans la projection frontale. Il peut donc arriver qu'une des projections soit ombrée et l'autre éclairée, que les deux projections soient ombrées ou que les deux projections soient éclairées.

Afin de déterminer si dans une épure les faces d'une plaque sont ombrées ou éclairées, on commence par déterminer si les deux projections donnent à voir la même face ou si les deux faces sont vues.

On choisit ensuite l'une des projections, par exemple la projection frontale (le cas dans l'épure ci-dessous). Dans cette projection, on se donne un rayon lumineux passant par un des points de la plaque et coupant dans cette projection une des autres arêtes de la plaque. Il est important de noter ici que, ne travaillant que dans une des deux projections, cette intersection d'un rayon lumineux issu d'un point de la plaque avec une des arêtes de la plaque **n'est qu'apparente**. Il s'agit justement de déterminer si, en ce point d'intersection apparent, un tel rayon lumineux est **en avant** ou **en arrière** de la plaque (ou bien **au-dessus** ou **en dessous** si on a choisi la projection horizontale). On fait donc passer par ce point une droite de bout (verticale dans le cas de la projection horizontale). En ce point d'intersection apparente, un point de la droite de bout appartient au rayon lumineux (ici le point N) et un autre appartient à l'arête (ici AB) de la plaque (ici le point M). On regarde ensuite dans la projection horizontale de cette droite de bout la position respective de ces points.

Dans l'épure ci-dessous, le point (M) de l'arête (AB) est en avant du point (N) du rayon lumineux. Le rayon lumineux est donc *en arrière* de la plaque. La face vue en projection frontale est donc dans l'ombre. Par ailleurs, les projections de la plaque étant de sens contraire par rapport à la ligne de terre, les deux faces sont vues et la projection horizontale de la plaque est donc éclairée.

On peut procéder symétriquement en choisissant la projection horizontale et une droite verticale (IJ).

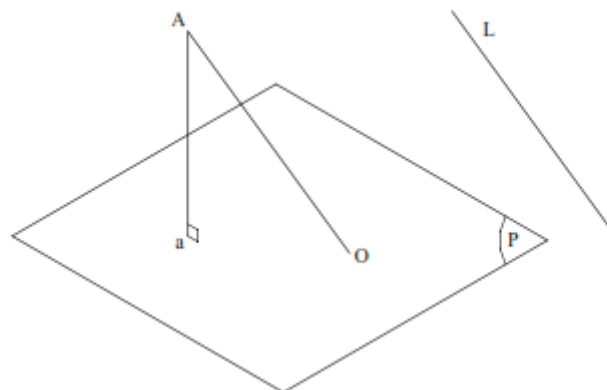


3.2 Ombres portées sur les plans de projection

3.2.1 Principe de la projection oblique

La projection oblique sur un plan se distingue de la projection orthogonale par le fait que la droite projetante (L) n'est pas orthogonale au plan de projection.

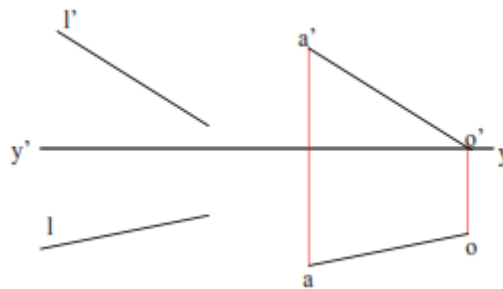
Dans la figure ci-dessous, (a) est la projection orthogonale du point (A) sur le plan (P), et (O) en est la projection oblique selon la droite projetante (L).



Dans l'épure ci-dessous, on recherche la projection oblique (O) du point (A) sur le plan horizontal et selon la droite projetante (L). Ceci se réalise en deux étapes :

- on mène par le point (A) une droite parallèle à (L).
- on recherche la trace horizontale de cette parallèle.

Cette trace horizontale (O) de la parallèle à (L) menée par (A) est la projection oblique selon (L) du point (A) sur le plan horizontal.

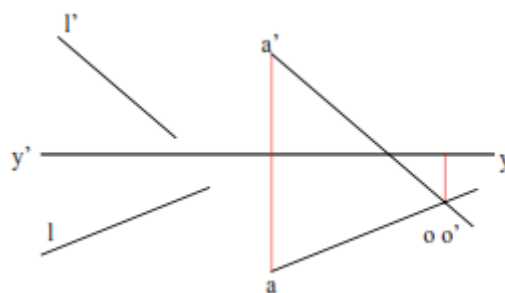


De la même façon, on construit la projection oblique du point (A) sur le deuxième bissecteur selon une projetante (L) :

- on mène par le point (A) une droite parallèle à (L).
- on recherche l'intersection de cette parallèle avec le 2ème bissecteur.

On sait que les points du deuxième bissecteur ont leurs projections confondues.

L'intersection d'une droite avec le deuxième bissecteur est donc le point d'intersection de sa projection frontale avec sa projection horizontale.

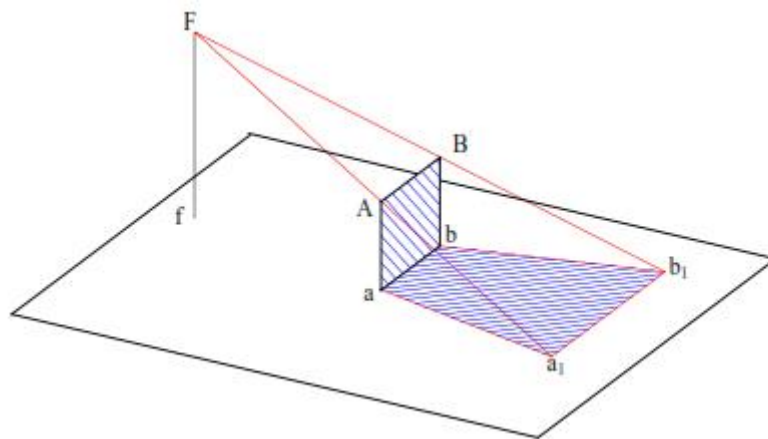


3.2.2 Application à la représentation des ombres

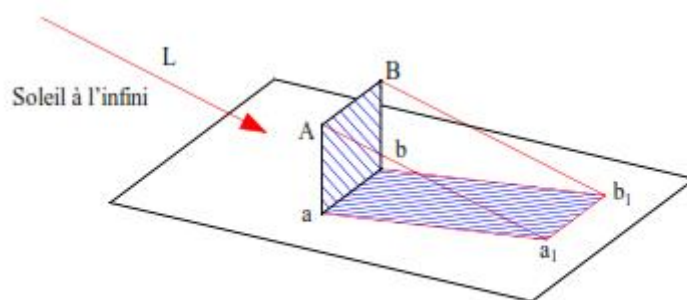
En géométrie descriptive, on distingue classiquement deux types d'ombres, suivant la nature de la source lumineuse.

Si celle-ci est située à une distance finie de l'objet considéré, tous les rayons lumineux partent d'un même point : la source lumineuse elle-même (le flambeau).

On parle alors d'ombre **au flambeau**. Chercher l'ombre d'un objet consiste donc à chercher l'intersection des droites issues de la source lumineuse et passant par les sommets de l'objet avec les plans de projection ou avec un plan quelconque considéré comme opaque.



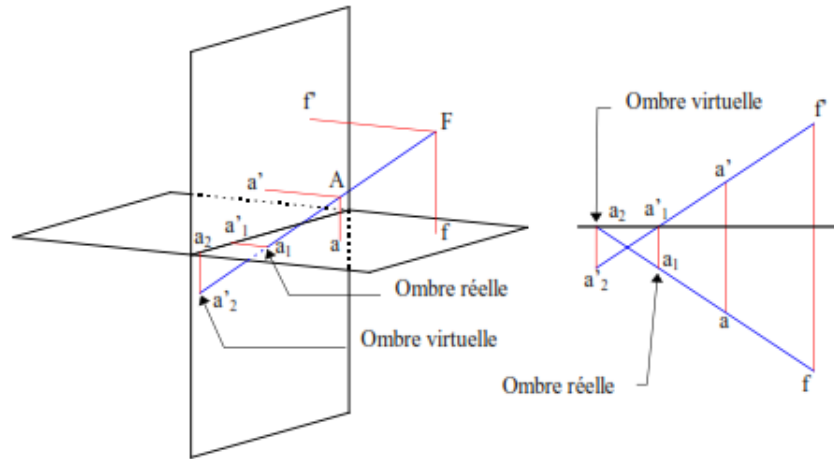
Si la source lumineuse est située à l'infini, créant ainsi des ombres similaires à celles du soleil, les rayons lumineux sont parallèles entre eux. Dans ce cas, chercher l'ombre d'un objet consiste à en faire une projection oblique selon la direction de la source lumineuse sur les plans de projection ou sur un plan quelconque considéré comme opaque.



3.2.2.1 Ombre d'un point (flambeau) :

Soit (A) un point donné du premier dièdre, et (F) un flambeau appartenant également au premier dièdre. On recherche ici l'ombre du point (A) sur les plans de projections, considérés comme opaque. L'ombre d'un point est également un point. Le point (A) aura donc deux ombres : l'une sur le plan horizontal et l'autre sur le plan frontal, mais une seule sera "vue".

Le premier plan de projection rencontré par la droite issue de (F) et passant par (A) portera l'ombre **réelle**, c'est-à-dire vue, tandis que l'autre plan de projection portera l'ombre **virtuelle**.



3.2.2.2 Ombre d'un segment (AB) (soleil) :

On recherche ici l'ombre sur les plans de projections d'un segment (AB) situé dans le premier dièdre. La direction des rayons lumineux est celle de la droite (L).

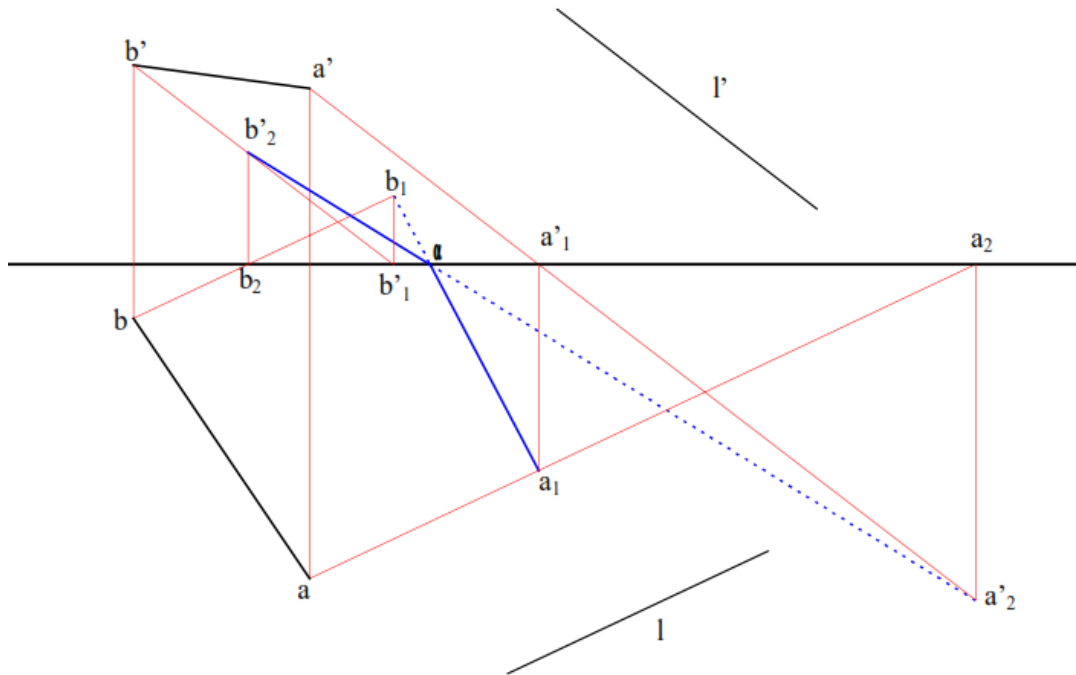
Cette construction se décompose en deux temps :

- on recherche d'abord l'ombre (la projection) du segment sur un des plans de projection (ici le plan horizontal) en menant par (A) et (B) des parallèles à (L).
- Soit (A1B1) l'ombre sur le plan horizontal du segment (AB). Ici trois cas peuvent se produire :
- (A1B1) est entièrement dans le 1er dièdre, et dans ce cas l'ombre sur le plan horizontal sera entièrement réelle et l'ombre sur le plan frontal sera entièrement virtuelle.
- (A1B1) est entièrement dans le second dièdre. L'ombre horizontale est entièrement virtuelle et l'ombre frontale entièrement réelle.
- (A1B1) appartient en partie au 1er dièdre et en partie au second dièdre (c'est le cas dans l'épure ci-dessous).

L'ombre horizontale coupe donc la ligne de terre en un point (a). Une partie de cette ombre, ici (A1a), sera réelle et l'autre partie, (a B1), virtuelle car située en arrière du plan frontal. On

a donc affaire à un **ressaut d'ombre** sur le plan frontal. Le point (a) appartient à l'ombre de (AB) sur le plan horizontal et à l'ombre de (AB) sur le plan frontal.

Il reste donc à construire le ressaut d'ombre sur le plan frontal. Pour se faire il n'est nécessaire que de construire l'ombre sur le plan frontal du point (B), soit (B2)



3.2.3 Ombre d'une plaque sur les plans de projection :

Soit une plaque définie par 3 points (ABC). On cherche son ombre sur les plans de projection, ceux-ci étant considérés comme opaques. De même que dans le cas d'un segment (cf 2.3.4.2.5), une plaque peut porter ombre soit entièrement sur le plan horizontal, soit entièrement sur le plan frontal, soit sur les deux plans de projections et dans ce cas on aura affaire à un ressaut.

On commence donc par rechercher l'ombre sur un des plans de projection (ici le plan horizontal), puis on complète éventuellement cette ombre dans l'autre plan.

Dans l'épure ci-dessous, le point (B) porte ombre sur le plan frontal en (B2).

